Vereinfachte Indexformeln für den interregionalen Preisvergleich

Ludwig von Auer

Universität Trier

28. Juni 2012
Messung der Preise, Trier

Vorbemerkungen

- Fast jeder sinnvolle multilaterale Preisindex kann einem von drei Konstruktionsprinzipien zugeordnet werden:
  - Korrekturansatz
  - Verkettungsansatz
  - Homogenisierungsansatz
    (Hauptvertreter: Durchschnittswertansatz)

1. Multilaterale Preisindizes

- Regionen $r = 1, 2, \ldots, R$.
- Jede Region lässt sich sinnvoll mit jeder anderen Region vergleichen.
- Dies erfordert einen multilateralen Preisindex.
- In jeder Region r werden die gleichen Güter $i = 1, 2, \ldots, N$ betrachtet.
- Preise $p_i^r \in \mathbb{R}_{++}^N$
- Mengen $x_i^r \in \mathbb{R}_{+}^N$
- Transaktionswert in Region r: $V^r = \sum_{i=1}^N p_i^r x_i^r$.

- Ein *multilateraler Preisindex* P ist eine Funktion, welche die Preise und Mengen aller N Güter aller R Regionen in die R^2 bilateralen Vergleichskennzahlen

$$\begin{bmatrix} P^{11} & P^{12} & \dots & P^{1R} \\ P^{21} & P^{22} & \dots & P^{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{R1} & P^{R2} & \dots & P^{RR} \end{bmatrix}$$

  abbildet.
- Ein *bilateraler Preisindex* $\ddot{P}$ ist eine Funktion, welche die Preise und Mengen aller N Güter zweier Regionen r und s in eine Vergleichskennzahl $\ddot{P}^{rs}$ abbildet.

- Ein multilateraler Preisindex P sollte den Transitivitätstest erfüllen:

$$P^{rs} = P^{rt} P^{ts} \qquad \forall\, r, s, t = 1, \ldots, R \ ,$$

wobei t eine beliebige „Brückenregion" bezeichnet.

- Äquivalente Definition des Transitivitätstests:

$$P^{rs} = \frac{P^{s}}{P^{r}} \qquad \forall\, r, s = 1, \ldots, R \ ,$$

wobei $P^{1}, \ldots, P^{R}$ als Preisniveaus (Kaufkraftparitäten) zu interpretieren sind.

- Alle relevanten multilateralen Preisindizes erfüllen den Transitivitätstest.

2. Durchschnittswertansatz

- Der Durchschnittswertansatz ist die wichtigste Unterkategorie des Homogenisierungsansatzes.
- Die Summierung heterogener Güter

$$Q^r = \sum_{i=1}^{N} x_i^r$$

ist eine sinnlose Rechenoperation.

- Transformationsfaktoren π_i können die heterogenen Maßeinheiten der Güter in eine künstliche *Standardeinheit* umwandeln (Homogenisierung).
- Beispiel: 1 Liter Vollmilch und 500g Weizenbrot.

$\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow$ 1 Liter Vollmilch entspricht 1 Standardeinheit

$\pi_2 = 2 \quad \Rightarrow$ 500g Weizenbrot entspricht 2 Standardeinheiten

$\Rightarrow$ 1 Weizenbroteinheit entspricht 2 Einheiten Vollmilch.

- Mit Hilfe der Transformationsfaktoren erhält man transformierte
  - Mengen $\pi_i x_i^r$ (Zahl der in x_i^r enthaltenen Standardeinheiten) und
  - Preise p_i^r/π_i (Preis einer Standardeinheit wenn in der Form des Gutes i gekauft).
- Eine Addition der transformierten Mengen $\pi_i x_i^r$ ist sinnvoll, da sie alle in der gleichen Standardeinheit gemessen sind:

$$Q^r = \sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i^r$$

- Da immer unterstellt wird, dass

$$V^r = P^r Q^r$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} P^r &= \frac{V^r}{Q^r} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i^r x_i^r}{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i^r} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \left(p_i^r / \pi_i\right) \pi_i x_i^r}{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i^r} \end{aligned}$$

Interpretation: Das Preisniveau P^r entspricht dem in Region r zu bezahlenden Durchschnittswert einer Standardeinheit.

- Wie werden die Transformationsfaktoren π_i ermittelt?
- Die π_i-Berechnungsformeln verwenden ausschließlich die ohnehin vorhandenen Preis- und Mengendaten (p_i^r und x_i^r).
- Die Formeln legen lediglich die *Relationen* der Transformationsfaktoren (π_i/π_j) eindeutig fest.
- Eine einheitliche Skalierung sämtlicher π_i mit einer beliebigen Konstanten λ ist also zulässig (freie Wahl der Standardeinheit).

3. Geary-Khamis Preisindex

- Dieser additive Preisindex geht auf Geary (1958) und Khamis (1972) zurück.
- Geary spricht von „international prices" π_i statt von Transformationsfaktoren.
- Die π_i-Berechnungsformel lautet

$$\pi_i = \lambda \sum_{r=1}^{R} w_i^r \frac{p_i^r}{P^r} \qquad (i = 1, ..., N) \ ,$$

mit

$$w_i^r = \frac{x_i^r}{\sum_{s=1}^{R} x_i^s} \ ,$$

wobei λ die frei wählbare Skalierungskonstante ist.

- Es muss folglich das Gleichungssystem

$$\pi_i = \lambda \sum_{r=1}^{R} w_i^r \frac{p_i^r}{P^r} \qquad \text{mit } w_i^r = \frac{x_i^r}{\sum_{s=1}^{R} x_i^s} \qquad (i = 1, ..., N)$$

$$P^r = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i^r x_i^r}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i^r} \qquad (r = 1, ..., R)$$

simultan gelöst werden (gelingt über iterativen Prozess).

- Die Geary-Khamis Methode neigt zum Gerschenkron-Effekt: Unterschätzung der Preisniveaus jener Regionen, deren Mengenstruktur von der Mengenstruktur der dominanten Region(en) deutlich abweichen.

4. Modifikationen des Geary-Khamis Preisindex

- Symmetrischere Gewichtung in der π_i-Formel.
- Beispiel 1: Der Iklé (1972) Preisindex

$$w_i^r = \frac{x_i^r / Q^r}{\sum_{s=1}^{R} x_i^s / Q^s} \qquad (i = 1, ..., N \; ; \quad r = 1, ..., R)$$

- Beispiel 2:

$$w_i^r = \frac{v_i^r / V^r}{\sum_{s=1}^{R} \left(v_i^s / V^s \right)} \qquad (i = 1, ..., N \; ; \quad r = 1, ..., R)$$

- Beispiel 3: $w_i^r = 1/R \qquad (i = 1, ..., N \; ; \quad r = 1, ..., R)$

- Statt

$$\pi_i = \lambda \sum_{r=1}^{R} w_i^r \frac{p_i^r}{P^r} \qquad (i = 1, ..., N)$$

könnte

$$\pi_i = \lambda \prod_{r=1}^{R} \left(\frac{p_i^r}{P^r} \right)^{w_i^r} \qquad (i = 1, ..., N)$$

oder

$$\pi_i = \lambda \left[\sum_{r=1}^{R} w_i^r \left(\frac{p_i^r}{P^r} \right)^{-1} \right]^{-1} \qquad (i = 1, ..., N)$$

verwendet werden.

- Einsetzen von

$$\pi_i = \lambda \prod_{r=1}^{R} \left(\frac{p_i^r}{P^r} \right)^{w^r} \qquad (i = 1, ..., N)$$

in

$$P^r = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i^r x_i^r}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i^r} \qquad (r = 1, ..., R)$$

liefert:

$$
\begin{aligned}
P^r &= \frac{V^r}{\sum_{i=1}^N \left[\lambda \prod_{s=1}^{R} \left(p_i^s / P^s\right)^{w^s}\right] x_i^r} \\
&= \frac{V^r}{\lambda \left[\prod_{s=1}^{R} P^s\right]^{-w^s} \sum_{i=1}^N \left[\prod_{s=1}^{R} \left(p_i^s\right)^{w^s}\right] x_i^r} \qquad (r = 1, ..., R) \; .
\end{aligned}
$$

und damit

$$
P^{rs} = \frac{P^s}{P^r} = \frac{V^s}{V^r} \frac{\sum_{i=1}^N \left[\prod_{t=1}^{R} \left(p_i^t\right)^{w^t}\right] x_i^r}{\sum_{i=1}^N \left[\prod_{t=1}^{R} \left(p_i^t\right)^{w^t}\right] x_i^s} \qquad (r, s = 1, ..., R) \; .
$$

- Ein Beispiel ist der in Eurostat (1978) vorgestellte Gerardi Index:

$$P^{rs} = \frac{P^s}{P^r} = \frac{V^s}{V^r} \frac{\sum_{i=1}^N \left[\prod_{t=1}^R \left(p_i^t\right)^{1/R} \right] x_i^r}{\sum_{i=1}^N \left[\prod_{t=1}^R \left(p_i^t\right)^{1/R} \right] x_i^s} \qquad (r, s = 1, \ldots, R) \; .$$