Aggregationskonsistenz von Preisindizes

Ludwig von Auer (Universität Trier)

20. Juni 2013

1 Einleitung

- Oftmals wird eine Zerlegung der allgemeinen Inflationsrate (Verbraucherpreisindex) in einzelne Komponenten benötigt.
- *Beispiel:* Zentralbanken zerlegen die Inflationsrate in die
  - Kerninflation (alle Produkte außer Saison-Lebensmittel und Energie) und die
  - Restinflation (Saison-Lebensmittel und Energie).
- *Aggregationskonsistenz* fordert, dass die zweistufige Berechnung der allgemeinen Inflationsrate genau das gleiche Resultat liefert wie die einstufige Berechnung.

2 Aggregationskonsistenz des Laspeyres Index

- Die Menge A umfasse die Güter $i = 1, ..., N$ des Schwedischen Verbraucherpreisindex (Schweden-CPI).
- Für jedes Gut i sind die Mengen und Preise der Basis- und Vergleichsperiode bekannt: $(p_i^0, x_i^0, p_i^1, x_i^1)$, hier die Jahre 2009 und 2010.

Einstufige Berechnung

- Berechnung des Schweden-CPI mit dem Laspeyres Index

$$P^{\text{Laspeyres}} = \frac{\sum_{i \in A} p_i^1 x_i^0}{\sum_{i \in A} p_i^0 x_i^0} = \sum_{i \in A} r_i \frac{v_i^0}{V^0} = 1,019430$$

wobei

$$\begin{aligned} r_i &= p_i^1 / p_i^0 \\ v_i^0 &= p_i^0 x_i^0 \\ V^0 &= \textstyle\sum_{i \in A} v_i^0 = 149,7581 \end{aligned}$$

Erste Stufe der zweistufigen Berechnung

- Die Menge A werde in $K = 2$ Teilmengen zerlegt.
- Die Menge A_{Kern} seien die Güter der Kerninflation.
- Die Menge A_{Rest} seien die restlichen Güter.

- Für die Kerninflation ergibt sich im Schwedischen Verbraucherpreisindex

$$P_{\text{Kern}}^{\text{Laspeyres}} = \sum_{i \in A_{\text{Kern}}} r_i \frac{v_i^0}{V_{\text{Kern}}^0} = 1,013436$$

und für die Restinflation

$$P_{\text{Rest}}^{\text{Laspeyres}} = \sum_{i \in A_{\text{Rest}}} r_i \frac{v_i^0}{V_{\text{Rest}}^0} = 1,062276$$

wobei

$$\begin{aligned} V_{\text{Kern}}^0 &= \sum_{i \in A_{\text{Kern}}} v_i^0 = 131,3800 \\ V_{\text{Rest}}^0 &= \sum_{i \in A_{\text{Rest}}} v_i^0 = 18,3781 \end{aligned}$$

Zweite Stufe der zweistufigen Berechnung

- Laspeyres-Berechnungsformel

$$\begin{aligned}
P^{\text{Laspeyres, zweistufig}} &= \sum_{k=1}^{K} P_k^{\text{Laspeyres}} \frac{V_k^0}{V^0} \\
&= P_{\text{Kern}}^{\text{Laspeyres}} \frac{V_{\text{Kern}}^0}{V^0} + P_{\text{Rest}}^{\text{Laspeyres}} \frac{V_{\text{Rest}}^0}{V^0} \\
&= 1,013436 \frac{131,3800}{149,7581} + 1,062276 \frac{18,3781}{149,7581} \\
&= 1,019430 = P^{\text{Laspeyres}}
\end{aligned}$$

wobei $V^0 = V_{\text{Kern}}^0 + V_{\text{Rest}}^0$.

- Folglich ist der Laspeyres Index *aggregationskonsistent*.

- Laspeyres verwendet veraltete Gewichte, aktuelle Mengen gehen nicht ein.
- Der Index tendiert zu einer Überschätzung der Inflation.
- Viele Preisstatistiker bevorzugen deshalb *superlative Indizes*: Fisher, Törnqvist und Walsh.
- Aber diese werden als nicht aggregationskonsistent erachtet.

3 Aggregationskonsistenz des Walsh Index

Einstufige Berechnung

- Berechnung des Schweden-CPI mit dem Walsh Index

$$
\begin{aligned}
P^{\text{Walsh}} &= \frac{\sum_{i\in A} p_i^1 \sqrt{x_i^0 x_i^1}}{\sum_{i\in A} p_i^0 \sqrt{x_i^0 x_i^1}} \\
&= \sum_{i\in A} r_i \frac{\sqrt{v_i^0 v_i^1 / r_i}}{\sum_{j\in A} \sqrt{v_j^0 v_j^1 / r_j}} \\
&= \sum_{i\in A} r_i \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{V}} \\
&= 1,019193
\end{aligned}
$$

wobei $\tilde{v}_i = \sqrt{v_i^0 v_i^1 / r_i}$ und $\tilde{V} = \sum_{i\in A} \tilde{v}_i$

Erste Stufe der zweistufigen Berechnung

- Für die Kerninflation ergibt sich

$$P_{\text{Kern}}^{\text{Walsh}} = \sum_{i \in A_{\text{Kern}}} r_i \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{V}_{\text{Kern}}} = 1,013183$$

und für die Restinflation

$$P_{\text{Rest}}^{\text{Walsh}} = \sum_{i \in A_{\text{Rest}}} r_i \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{V}_{\text{Rest}}} = 1,062373$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\text{Kern}} &= \sum_{i \in A_{\text{Kern}}} \tilde{v}_i = 133,6291 \\ \tilde{V}_{\text{Rest}} &= \sum_{i \in A_{\text{Rest}}} \tilde{v}_i = 18,5999 \end{aligned}$$

Zweite Stufe der zweistufigen Berechnung

- Walsh-Berechnungsformel

$$
\begin{aligned}
P^{\text{Walsh, zweistufig}} &= \sum_{k=1}^{K} P_k^{\text{Walsh}} \frac{\tilde{V}_k}{\tilde{V}} \\
&= P_{\text{Kern}}^{\text{Walsh}} \frac{\tilde{V}_{\text{Kern}}}{\tilde{V}} + P_{\text{Rest}}^{\text{Walsh}} \frac{\tilde{V}_{\text{Rest}}}{\tilde{V}} \\
&= 1,013183 \frac{133,6291}{152,2291} + 1,062276 \frac{18,5999}{152,2291} \\
&= 1,019193 = P^{\text{Walsh}}
\end{aligned}
$$

- Folglich ist auch der Walsh Index *aggregationskonsistent*.

4 Allgemeines Prinzip

- Ein Preisindex P ist genau dann aggregationskonsistent, wenn er in der Form

$$f(P, Z^1, ..., Z^Q) = \sum_{i \in A} f(r_i, z_i^1, ..., z_i^Q) \ ,$$

geschrieben werden kann, wobei $f(\cdot)$ eine stetige Funktion ist, die in ihrem ersten Argument streng monoton steigend ist. Ferner muss gelten, dass $Z^q = \sum_{i \in A} z_i^q$, wobei $z_i^q = h^q(p_i^0, x_i^0, p_i^1, x_i^1)$.

- Der Laspeyres Index

$$P^{\text{Laspeyres}} = \sum_{i \in A} r_i \frac{v_i^0}{V^0}$$

(mit $V^0 = \sum_{i \in A} v_i^0$) lässt sich schreiben:

$$P^{\text{Laspeyres}} \cdot V^0 = \sum_{i \in A} r_i v_i^0$$

- Für ihn gilt folglich:

$$f(P, Z^1) = \sum_{i \in A} f(r_i, z_i^1) \ ,$$

wobei $z_i^1 = v_i^0$ und $Z^1 = V^0$.

- Der Walsh Index

$$P^{\text{Walsh}} = \sum_{i \in A} r_i \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{V}}$$

(mit $\tilde{V} = \sum_{i \in A} \tilde{v}_i = \sum_{i \in A} \sqrt{v_i^0 v_i^1 / r_i}$), lässt sich schreiben:

$$P^{\text{Walsh}} \cdot \tilde{V} = \sum_{i \in A} r_i \tilde{v}_i$$

- Für ihn gilt folglich:

$$f\left(P, Z^1\right) = \sum_{i \in A} f\left(r_i, z_i^1\right) ,$$

wobei $z_i^1 = \tilde{v}_i$ und $Z^1 = \tilde{V}$.

5 Fazit

- Für die ökonomische Empirie ist Aggregationskonsistenz eine wichtige Eigenschaft.
- Es war bekannt, dass der Laspeyres Index und einige andere Indizes diese Eigenschaft besitzen.
- Hier wurde gezeigt, dass zahlreiche weitere Indizes aggregationskonsistent sind.
- Darunter ist auch der Walsh Index, der zur Gruppe der superlativen Indizes gehört.
- Der Fisher Index und der Törnqvist Index scheinen nicht aggregationskonsistent zu sein.